4.- Radicals

Hi ha nombres reals no racionals que es presenten sovint en els càlculs més diversos. Aquests nombres són les arrels quadrades que no es poden expressar mitjançant nombres racionals. Estudiarem, en aquest apartat, les propietats i operacions amb els esmentats nombres, la qual cosa ens permetrà:

a) Obtenir els resultats exactes de molts problemes, o amb càlculs més senzills i amb menys error que si substituíssim immediatament el nombre irracional per una de les aproximacions decimals.

b) Adquirir la tècnica de càlcul imprescindible en temes posteriors com, per exemple, en el tema de funcions i d'equacions.

Problemes d'introducció

A) Tenim una bassa, de forma quadrangular, de 2 m de costat. Als seus vèrtexs i arran de l'aigua hi ha quatre arbres. Volem eixamplar-la, tot conservant-ne la forma i sense tocar-hi els arbres, doblant-ne la superfície. Els arbres hauran de quedar fora de l'aigua i a la vorera de la nova bassa. Com ho faries i quin haurà d'ésser el costat del nou quadrat? Un cop trobat el costat, comprova que, efectivament, la superfície és doble de la inicial. Si no et dóna exactament el doble, a què creus que es deu?

B) La piràmide de Keops, una de les set meravelles del món antic, té la forma d'una piràmide quadrangular regular que actualment té 138 *m* d'alçada i 227 *m* de costat. Quant amiden les arestes laterals i quins són el volum i l'àrea?

C) Quina longitud de filat ens caldrà per a tancar dos terrenys de forma quadrangular de superfícies 2048 m^2 i 512 m^2 respectivament?

Treball amb radicals

Exercici 1

a) Ben segur saps que $\sqrt{9} = 3$, $\sqrt{36} = 6$, $\sqrt{25} = 5$; però ens podries dir el perquè?

b) I és cert que $\sqrt{9} = -3$, $\sqrt{36} = -6$ i $\sqrt{25} = -5$? Justifica les respostes.

c) Són nombres reals els radicals $\sqrt{-9}$, $\sqrt{-4}$, $\sqrt[3]{-8}$, $\sqrt[3]{-2}$? Justifica les respostes.

d) Si escrivim $\sqrt{A} = a$, què volem indicar? I si escrivim $i\sqrt[3]{B}=b$? I si escrivim $\sqrt[n]{C}=c$?

Exercici 2

Les igualtats següents són certes o falses?

a) $\sqrt{4} + \sqrt{9} = \sqrt{13}$, b) $\sqrt{36} + \sqrt{25} = \sqrt{61}$ c) $\sqrt{4} \cdot \sqrt{9} = \sqrt{36}$

d) $\sqrt{36} \cdot \sqrt{25} = \sqrt{900}$ e) $\sqrt{36} : \sqrt{9} = \sqrt{9}$ f) $\sqrt{36} - \sqrt{4} = \sqrt{32}$

Justifica les respostes.

En un problema anterior has trobat $\sqrt{9} = \pm 3$ perquè $3^2 = 9$; $\sqrt{A} = \pm a$ perquè $a^2 = A$. L'expressió anterior l'anomenem, **arrel quadrada.** A són els radicands i els numerets col·locats sobre el signe $\sqrt{\ }$ (signe radical) són els índexs (quan aquest número és el 2 el costum és no escriure'l). Observa que la radicació és una operació inversa de la potenciació, ja que:

$\sqrt{9} = \pm 3$ <=> $3^2 = 9$ substituint la primera igualtat a la segona tenim:

$(\sqrt{9})^2 = 9$

Exercici 3

a) Repassant l'apartat d) del problema 1 dóna la definició d'arrel n-èssima d'un nombre.

b) A l'expressió $\sqrt[n]{C} = c$ digues quin és l'índex, quin el radicand i quina l'arrel enèsima.

c) Justifica la igualtat $(\sqrt[n]{A})^n = A$.

Exercici 4

a) A partir de la definició $\sqrt{A} = a$ <=> $a^2 = A$ demostra les igualtats

$\sqrt{A}\cdot\sqrt{B} = \sqrt{A\cdot B}$ $\quad\quad$ $\sqrt{A}:\sqrt{B} = \sqrt{A:B}$

b) Remarca que, en canvi, les igualtats $\sqrt{A}+\sqrt{B} = \sqrt{A+B}$ i $\sqrt{A}-\sqrt{B} = \sqrt{A-B}$ són falses. Ho sabries demostrar?

c) Sabries provar que: $\sqrt[n]{A}\cdot\sqrt[n]{B} = \sqrt[n]{A\cdot B}$ i $\sqrt[n]{A}:\sqrt[n]{B} = \sqrt[n]{A:B}$ són certes. I que $\sqrt[n]{A}+\sqrt[n]{B} = \sqrt[n]{A+B}$ i $\sqrt[n]{A}-\sqrt[n]{B} = \sqrt[n]{A-B}$ són falses?

d) Sabries enunciar una regla per multiplicar dos radicals del mateix índex? I per dividir?

e) Justifica que $(\sqrt[n]{A})^m = \sqrt[n]{A^m}$

Descomposició d'arrels o simplicació de radicals

Anem a calcular la $\sqrt{2048}$ i $\sqrt{32}$. Ho farem de dues maneres, amb la calculadora i després intentant expressar-les com l'arrel quadrada d'un nombre més petit, simplificant l'arrel.

$2048 = 2^{11}$

$32 = 2^5$

Llavors fixem-nos que $\sqrt{2048} = 2^5\cdot\sqrt{2}$. Què val en funció de $\sqrt{2}$?

a) Calcula $\sqrt{45}$ i $\sqrt{180}$ en funció de $\sqrt{5}$.

b) Calcula $\sqrt[3]{2^7}$ en funció de $\sqrt{2}$

c) Enuncia una regla que et permeti treure tots els factors possibles de $\sqrt[n]{A^m}$ quan m>n.

Exercici 1

a) Treu tots els factors que puguis fora del radical en els casos següents:

$\sqrt{180}$ $\quad$ $\sqrt{24696}$ $\quad$ $\sqrt{648000}$ $\quad$ $\sqrt[3]{1728}$

b) Fes les operacions indicades i treu fora del radical resultant tots els factors que puguis:

$\sqrt{2}\cdot\sqrt{6}$ $\quad$ $\sqrt{21}\cdot\sqrt{7}$ $\quad$ $\sqrt{98}:\sqrt{18}$ $\quad$ $\sqrt{180}:\sqrt{80}$

$\sqrt{8}\cdot\sqrt{2}$ $\quad$ $\sqrt{27}\cdot\sqrt{12}$ $\quad$ $\sqrt{27}\cdot\sqrt{15}\cdot\sqrt{20}$

Exercici 2

Utilitzant un procés contrari al de treure factors d'un radical, és a dir, introduint-los dins el radical, expressa com a radicals de coeficient 1:

a) $3\cdot\sqrt{5}$ b) $4\cdot\sqrt{2}$ c) $3\cdot\sqrt[3]{\frac{2}{9}}$ d) $2\cdot\sqrt{116}$ e) $2\cdot\sqrt{9}$

Exercici 3

Comprova si són certes les següents igualtats:

a) $\sqrt[4]{2}=2$ b) $\sqrt[6]{2^4}=\sqrt[3]{2^4}$ c) $\sqrt[15]{27}=\sqrt[5]{3}$ d) $\sqrt[4]{9}=\sqrt{3}$ e) $\sqrt[7]{a}=\sqrt[14]{a^2}$

Enuncia una regla per simplificar el radical $\sqrt[m]{a^n}$

Radicals semblants.

Suma de radicals

Dos radicals direm que són semblants si tenen el mateix radicand i el mateix index; per tant, només poden diferir en el coeficient. Per exemple, $3\cdot\sqrt{5}$ i $\sqrt{5}$

Quan dos radicals són semblants és poden sumar de manera immediata, en cas contrari, l'operació s'ha de deixar indicada.

Exercici 1

Calcula el resultat tant com puguis

a) $\sqrt{12}+\sqrt{27}+\sqrt{108}$ b) $3\cdot\sqrt{3}-2\cdot\sqrt{12}+5\cdot\sqrt{27}$ c) $2\cdot\sqrt{180}-5\cdot\sqrt{5}-2\cdot\sqrt{45}$

Multiplicació de radicals

Exercici 2

Escriu en forma de radical únic les expressions

a) $\sqrt{3}\cdot\sqrt[3]{2}$ b) $\sqrt[3]{4}\cdot\sqrt[4]{9}$ c) $\sqrt[12]{7}\cdot\sqrt[8]{5}\cdot\sqrt[15]{9}$ d) $\sqrt[6]{2}\cdot\sqrt[4]{3}\cdot\sqrt[9]{8}$

Exercici 3

Escriu com més simplificat millor

a) $\dfrac{\sqrt[5]{9}\cdot\sqrt[7]{3}}{\sqrt{2}}$ b) $\dfrac{\sqrt[3]{4}\cdot\sqrt[5]{7}}{\sqrt[9]{16}\cdot\sqrt[3]{2}}$ c) $\dfrac{\sqrt{2}\cdot\sqrt[3]{5}}{\sqrt[4]{5}\cdot\sqrt[7]{5}}$

Exercici 4

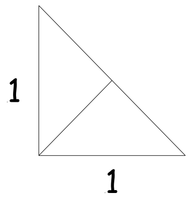
Fes els càlculs següents i simplifica'n els resultats

a) $(\sqrt{3}-\sqrt{2})\cdot(\sqrt{3}+\sqrt{2})$ b) $(1-\sqrt{3})\cdot(2+\sqrt{3})$ c) $(\sqrt{5}-2\cdot\sqrt{2})^2$

d) $(3\cdot\sqrt{2^3})\cdot(5\cdot\sqrt{2})$ e) $(6+4\cdot\sqrt{2})\cdot(6-4\cdot\sqrt{2})$

Racionalització de radicals

Hem vist que si dos radicals són semblants es poden sumar. Però a vegades, tenim radicals en el denominador d'una fracció; llavors per poder-la sumar amb altres fraccions cal eliminar el radical del denominador. Aquest procés rep el nom de racionalitzar la fracció.



La raó entre un catet i l'hipotenusa d'un triangle isòsceles de costat 1 és $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

a) Demostra que $\sqrt{2}=\frac{1}{\sqrt{2}}$

b) Generalitza la situació anterior per a un triangle d'hipotenusa a.

c) L'expressió anterior s'anomena racionalitzar una fracció.

Exercici 1: Racionalitza

a) $\frac{2}{\sqrt{5}}$ b) $\frac{3}{2\cdot\sqrt{3}}$ c) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ d) $\frac{15}{\sqrt{10}}$

a) $\frac{3}{2-\sqrt{3}}$ b) $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}$ c) $\frac{2}{5+\sqrt{2}}$ d) $\frac{5}{3-2\cdot\sqrt{3}}$

Problemes per aprofundir

1.- Comprova que $\sqrt{6+\sqrt{27}}\cdot\sqrt{6-\sqrt{27}}$ és un nombre enter.

2.- Efectua les operacions següents i simplifica

a) $\sqrt{a^3}-2a\cdot\sqrt[4]{a^2}+3a\cdot\sqrt[6]{a^3}-\sqrt[8]{a^{12}}$ b) $\frac{\sqrt{98}-\sqrt{18}}{\sqrt{96}}\cdot 30\cdot\sqrt{3}$

c) $(\sqrt{2}+\sqrt{3})\cdot(\sqrt{6}-1)$

3.- Efectua les operacions següents i simplifica

a) $\frac{1}{1+\sqrt{2}}-\frac{1}{1-\sqrt{2}}$ b) $\frac{7}{3-\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}+\frac{1}{2-\sqrt{3}}$

c) $\frac{5}{\sqrt{6}}+\frac{2}{\sqrt{6}-3\cdot\sqrt{2}}+4\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$

4.- Si $x\in\mathbb{N}$ i x>1, ordena aquests nombres,

$\frac{1}{x+1}, x, \frac{1}{x}, -\frac{1}{x}, \frac{1}{-x-1}$

5.- Ordena de major a menor els nombres a, a^2, $\frac{1}{a}$ i $\sqrt{a}$ en aquests dos casos:

a) si a>1 b) si 0<a<1