

SISTEMES D'EQUACIONS LINEALS

1. Comprova si $(0,1,2)$ és solució d'algun d'aquests sistemes:

$$(a) \begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ 3y - 2z = -1 \\ 5x + y - z = -1 \end{cases}$$

$$(b) \begin{cases} x - 2y = 0 \\ 3x + y = 1 \\ 3x - y + z = 2 \end{cases}$$

$$(c) \begin{cases} 2x - 4y + 2z = 0 \\ -2y + z = 0 \\ -4x + y + z = 3 \end{cases}$$

$$(d) \begin{cases} 3x + 2z = 2 \\ x + 3y = 1 \\ y + z = 0 \end{cases}$$

2. Resol els següents sistemes d'equacions i digues de quin tipus són:

$$(a) \begin{cases} 2x - y + 2z = 6 \\ 3x + y - z = 2 \\ -x + 2y - z = 0 \end{cases}$$

$$(b) \begin{cases} -3x + 2y - z = 0 \\ x - 2z = -1 \\ 2y - 7z = 3 \end{cases}$$

$$(c) \begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ 2x - y - z = 2 \\ 3x + y + 2z = 2 \end{cases}$$

$$(d) \begin{cases} x + y - z = -1 \\ -2x + y + z = 0 \\ 3x + 2y - 2z = 1 \end{cases}$$

$$(e) \begin{cases} x + 2y + 3z = 4 \\ -x + 3y - z = -2 \\ 2x - y + 4z = 6 \end{cases}$$

$$(f) \begin{cases} -x + 2y + z = 1 \\ x + y - 2z = -1 \\ 3y - z = 3 \end{cases}$$

$$(g) \begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x + y - z = 2 \\ x + y = 0 \end{cases}$$

$$(h) \begin{cases} 2x - y + z = 6 \\ 3x + y + 2z = -1 \\ 2x + 2y - 3z = -6 \end{cases}$$

3. (PAU, Juny 2004) La Joana i la Mercè tenien 20000 € cadascuna per invertir. Cadascuna d'elles fa la mateixa distribució dels seus diners en tres parts P, Q i R, i les porta a una entitat financera. Al cap d'un any, a la Joana li han donat un 4% d'interès per la part P, un 5% per la part Q i un 4% per la part R, i a la Mercè li han donat un 5% per la part P, un 6% per la part Q i un 4% per la part R. La Joana ha rebut en total 850 € d'interessos, mentre que la Mercè n'ha rebut 950 €. De quants euros constava cadascuna de les parts P, Q i R?

4. (PAAU, Setembre 1999) Una persona ha comprat dos productes en unes rebaixes. La suma dels preus dels dos productes abans de rebaixar era de 5.000 pessetes. Al primer li han aplicat una rebaixa d'un 10% i al segon una rebaixa del 20%. Si la persona ha pagat 4.300 pessetes per tots dos, digueu quant valia cada un dels productes abans de les rebaixes.
5. (PAAU, Setembre 1998) Si un milió de votants de l'esquerra haguessin votat la dreta, totes dues coalicions haurien obtingut el mateix nombre de vots. Però si, contràriament, un milió de votants de la dreta haguessin votat l'esquerra, aquesta hauria obtingut el triple de vots que aquella. Quants vots ha obtingut cada coalició?
6. (PAU, Juny 2005) Resoleu el sistema d'equacions següent:

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x + 3y - 4z = 9 \\ x - y + z = -1 \end{cases}$$

7. (PAU, Juny 2004) Un venedor té un salari mensual que està determinat per un sou fix més un cert percentatge sobre el volum de vendes que ha fet durant el mes. Si ven per valor de 2000 €, el seu salari és de 1200 € i, si ven per valor de 2500 €, el salari és de 1300 €. Trobeu el percentatge que guanya sobre el total de vendes i el sou fix.
8. (PAU, Setembre 2007) Una persona va a la vinateria i compra tres classes de vi. En total, en compra 20 botelles i s'hi gasta 100 €. Compra botelles de tres classes, A, B i C, que costen 3 €, 7 € i 8 € respectivament. Trobeu el nombre de botelles de cada classe que ha comprat, sabent que almenys n'ha comprat una de cada classe.
9. (PAU, Juny 2004) Tres germans tenen edats diferents, però sabem que la suma de les edats dels tres germans és de 37 anys, i la suma de l'edat del gran més el doble de l'edat del mitjà més el triple de l'edat del petit és de 69 anys.
- Expresseu les edats dels tres germans en funció de l'edat del germà petit.
 - És possible que el germà petit tingui 5 anys? I 12 anys? Raoneu la resposta.
 - Calculeu l'edat dels tres germans.
10. (PAU, Juny 2005) Una marca comercial utilitza tres ingredients A, B i C en l'elaboració de tres tipus de pizzes P1, P2 i P3. La pizza P1 s'elabora amb 1 unitat de A, 2 de B i 2 de C; la P2 s'elabora amb 2 unitats de A, 1 de B i 1 de C, i la P3 s'elabora amb 2 unitats de A, 1 de B i 2 de C. El preu de venda al públic és de 4,80 € per a P1, 4,10 € per a P2 i 4,90 € per a P3. Sabent que el marge comercial (benefici) és de 1,60 € en cadascuna, trobeu quant costa cada unitat de A, B i C a la marca comercial esmentada.

11. Resol els següents sistemes homogenis i digues de quin tipus són:

$$(a) \begin{cases} -x + 3y - z = 0 \\ 2y - 3z = 0 \\ 2x + z = 0 \end{cases}$$

$$(b) \begin{cases} 2x - y + 3z = 0 \\ y + 3z = 0 \\ -2x + 2y = 0 \end{cases}$$

12. Resol els següents sistemes d'equacions i digues de quin tipus són:

$$(a) \begin{cases} x + y = 1 \\ 2x - y = 5 \\ x - 2y = 4 \end{cases}$$

$$(b) \begin{cases} x - y = 2 \\ 2x + y = -1 \\ 4x - y = 0 \end{cases}$$

$$(c) \begin{cases} x - y = 2 \\ 2x - 2y = 1 \\ -x + y = 0 \end{cases}$$

$$(d) \begin{cases} x - y = 2 \\ 2x - 2y = 4 \\ -x + y = -2 \end{cases}$$

Interpreta geomètricament cada cas.

13. Calcula el rang de les matrius següents:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & -6 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 & 7 \\ 1 & 3 & 1 & 8 \\ 1 & 0 & -2 & -9 \end{pmatrix}$$

14. Calcula el valor d' a perquè el rang de la matriu següent sigui 2:

$$\begin{pmatrix} a & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

15. (PAU, Setembre 2006) Discuti en funció del paràmetre a el sistema següent:

$$\begin{cases} x + y + z = 5 \\ 5x + y - z = 11 \\ 3x - y + az = 2 \end{cases}$$

16. Discuteix, segons els valors d' m , el sistema d'equacions següent. Troba la solució per al cas $m = 8$.

$$\begin{cases} x + y + 3z = 2 \\ 2x + 3y + 4z = 0 \\ 3x + 4y + mz = 3 \end{cases}$$

17. Discuteix, segons els valors d' a , el següent sistema d'equacions:

$$\begin{cases} x + y - 2z = 0 \\ 4x + 2y - 5z = 0 \\ 3x + 5y + az = 0 \end{cases}$$

Troba les solucions en cada cas.

18. Discuteix i resol, segons els diferents valors del paràmetre m , el següent sistema d'equacions:

$$\begin{cases} x - y + 2z = -1 \\ 2x - y = 3 \\ -x + y - z = m \end{cases}$$

19. (PAAU, Juny 2000) Calculeu el valor de a que fa que el següent sistema d'equacions lineals sigui incompatible:

$$\begin{cases} 2x + ay = -a + 5 \\ ax + 8y = 2 \end{cases}$$

20. (PAAU, Juny 1999) Considereu el sistema d'equacions lineals

$$\begin{cases} ax - y = 2 - a \\ 2x - (a + 1)y = 2 \end{cases}$$

on a és un paràmetre. Per a quins valors de a el sistema és compatible i determinat? Per a quins valors és compatible i indeterminat? Per a quins valors és incompatible?

21. (PAU, Setembre 2004) Discutiu i, si s'escau, resoleu el sistema següent:

$$\begin{cases} 4x + 6y - 8z = 2 \\ 6x + 9y - 12z = 3 \\ x + 2y + z = 10 \end{cases}$$

22. (PAU, Juny 2004) En estudiar un sistema lineal dependent del paràmetre k pel mètode de Gauss, hem arribat a la matriu ampliada següent:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 8 \\ 0 & k-2 & 5 & 12 \\ 0 & 0 & k-1 & 0 \end{pmatrix}$$

Discuti el sistema en funció del paràmetre k .

23. (PAU, Juny 2006) Discutiu en funció del paràmetre m el sistema d'equacions següent:

$$\begin{cases} x + y + mz = 1 \\ x + y - z = 2 \end{cases}$$

En el cas que sigui possible doneu també la solució.

24. (PAU, Juny 2006) Discutiu en funció del paràmetre p el sistema d'equacions lineals de matriu ampliada

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 8 \\ 0 & p+5 & 7 & 5 \\ 0 & 0 & p-1 & 0 \end{pmatrix}$$

25. (PAU, Juny 2007) Tres entitats financeres, A, B i C, ofereixen, respectivament, per a dipòsits superiors a 2000 €, un interès anual del 2%, 3% i k % (que no coneixem). La Joana, en Manel i en Dani decideixen invertir els estalvis en aquestes entitats durant un any. Sabem que si tots ho fessin a l'entitat A, obtindrien en total uns beneficis de 164 €; però si la Joana optés per A, en Manel per C i en Dani per B, obtindrien 192 €; finalment, si la Joana i en Manel es decidissin per B i en Dani per C, obtindrien 218 €.

a) Escriviu un sistema d'equacions que descriu la situació.

b) Sense resoldre el sistema, determineu la quantitat total de diners invertida entre les tres persones.

c) Trobeu, si existeix, un valor de k per al qual hi hagi infinites solucions. Resoleu el sistema per a aquest valor de k , i doneu-ne tres solucions diferents.